REFERENCIA: Sanz, M.T. & Gómez, B. (2015). Problemas descriptivos de fracciones. Componentes críticas. *ENSAYOS, Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30*(1). Enlace web: http://www.revista.uclm.es/index.php/ensayos - Consultada en fecha (dd-mm-aaaa)

PROBLEMAS DESCRIPTIVOS DE FRACCIONES. COMPONENTES CRÍTICAS

DESCRIPTIVE PROBLEMS OF FRACTIONS. CRITICAL COMPONENTS

María Teresa Sanz García
Bernardo Gómez Alfonso
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia

Recibido: 15/04/2015
Aceptado: 25/06/2015

Resumen:

En este trabajo se presenta un estudio sobre los problemas descriptivos de fracciones que están relacionadas entre sí mediante el complemento aditivo. Se trata de problemas verbales de fracciones que ha transmitido la tradición escolar cuya estructura es la de una sucesión de fracciones. Son problemas en el contexto de una historieta o narración pseudorealista que no pretenden dar respuesta a ninguna situación verdaderamente práctica. El análisis racional e histórico epistemológico de estos problemas ha permitido avanzar desde la identificación de sus distintos tipos, a las peculiaridades de su estructura, sus lecturas analíticas y métodos de resolución, hacia las componentes críticas de estos problemas. Se espera que estas componentes sean una herramienta útil para el análisis cognitivo que dé cuenta del desempeño de los estudiantes. Finalmente, con la información obtenida se tiene la intención de hacer una propuesta de enseñanza de estos problemas descriptivos de fracciones bien fundamentada.
Palabras clave: Didáctica de las matemáticas; pensamiento numérico y algebraico; resolución de problemas; problemas descriptivos de fracciones; componentes críticas

Abstract:
In this paper a study about descriptive fraction problems which are related to each other by the additive complement is presented. These word fractions problems has been transmitted by the school tradition and their structure is a succession of fractions. They are problems in the context of a story or narrative pseudorealista not intended to address any truly practical situation. The rational, epistemological and historical analysis of these problems has premitted to identify their types, analytical readings, resolution methods and critical components. It is expected that these components are useful for cognitive analysis that accounts of student performance tool. Finally, the information obtained is intended to make a proposal for teaching these descriptive problems fractions.
Keywords: Mathematics education; Numerical and algebraic thinking; problem solving; descriptive fractions problems; critical components.

Introducción

A partir de una selección de libros de texto de autores de diferentes etapas históricas, se han estudiado los problemas de fracciones, con el propósito de transmitir conocimiento, así como prestar atención a aquellos aspectos de la resolución de problemas que tienen que ver con la producción de conocimientos significativos para el que aprende (Puig y Cerdán, 1988).

Para este análisis se ha hecho uso de las metodologías del análisis histórico y epistemológico (Gómez, 2003), y del análisis didáctico (Rico, Lupiañez y Molina, 2013) propias de la Didáctica de las Matemáticas.

En los textos aparecen desperdigados, desligados, a menudo en el capítulo dedicado a las fracciones, otras veces en la introducción al álgebra y antiguamente en un capítulo final de la aritmética, en un bloque de métodos particulares, donde se incluía, por ejemplo, la falsa posición. Algunos de los epígrafes bajo los que han sido encontrados son: Problemas de viajeros y también similares (Fibonacci, 1202), Problemas de Reglas Extraordinarias, (Ventallol, 1621), Problemas de ganancias y pérdidas (Peacock, 1845) Problemas de Fracciones de Fracciones (Bruño, 1961), Problemas de Falsa posición (Vallejo, 1841), Problemas descriptivos (Swetz, 2013), etc.

Es por ello el propósito de la parte inicial de este trabajo, el encontrar una clasificación que permita organizarlos e identificarlos. En el esquema que se muestra en la Figura 1 se propone una tentativa de clasificación atendiendo a cuál es el tipo de relación entre las fracciones.

En líneas generales se han podido encontrar dos tipos principales de problemas descriptivos de fracciones que denominamos problemas de fracciones no relacionadas entre sí y relacionadas entre sí. En los del primer tipo hay una secuencia de fracciones sin ligazón entre ellas y en los del segundo tipo la secuencia de fracciones se yuxtaponen con alguna relación o se enlazan de modo que una se aplica al resultado de otra fracción que le antecede.

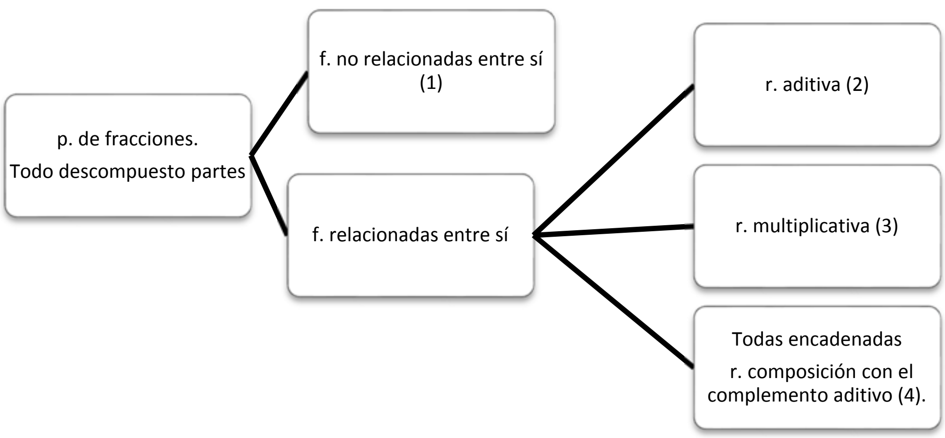

Figura 1. Clasificación de los problemas descriptivos de fracciones

(1) Aquí hay una lanza, que la ½ está en el fango y 1/3 está en el agua y fuera del agua tiene 7 palmos y ¼. Pide cuanto es de largo la lanza (Santcliment 1482, p.70, 311-312)

En general son problemas en los que un todo desconocido se descompone en partes dadas por fracciones y enteros, o fracciones más enteros, que no guardan ninguna relación entre sí.

(2) Encontró un gavilán a una bandada de palomas, y las saludó diciendo: bienvenida sea la bandada de las cien palomas, y una le respondió: aunque no vamos cien palomas, sin embargo, con estas, otras tantas como estas, la mitad de estas, la cuarta parte de estas y tu, gavilán componemos ciento cabal. Se pregunta cuántas palomas iban? (Vallejo, 1841, p. 283, cuestión 4ª).

En este tipo son problemas en los que un todo conocido se descompone en partes iguales o desiguales que vienen dadas por enteros y fracciones de las que se conoce su relación mutua aditiva.

(3) Pon por caso, que es una herencia de 70 ducados, y que hay dos herederos, y el uno ha de llevar tantos ducados más, cuanto fuere el tercio de los ducados que llevara el otro. (Pérez de Moya 1798, p.168-169).

En este caso es semejante al tipo (2) con diferencia de que la relación que se conoce entre las fracciones es multiplicativa.

(4) Me encontré con una piedra pero no la pesé; después de quitarle 1⁄7 y luego 1⁄13 [de lo que quedaba], encontré que pesaba 1 manna. ¿Cuál era el peso original de la piedra? (Katz 2003, 27).

Este es el último problema en el que se centra el trabajo, el estudio detallado de los problemas de fracciones relacionadas entre sí mediante el complemento aditivo. Además de un estudio detallado, se pretende presentar el esquema de resolución algebraica de este tipo de problemas que ayudará en la definición de las componentes críticas de los mismos.

Estos problemas tienen en común un sintagma: “de lo que queda”, que permite reconocerlos fácilmente. Este sintagma se refiere a la parte complementaria de una fracción “del todo” (cantidad total desconocida) sobre la que se aplica una nueva fracción, de acuerdo con la secuencia establecida en el enunciado del problema.

Tras la búsqueda de este tipo de problemas podríamos decir que podrían emanar de enunciados como el de “la medición de piedra”, de origen mesopotámico,

Me encontré con una piedra pero no la pesé; después de quitarle 1⁄7 y luego 1⁄13 [de lo que quedaba], encontré que pesaba 1 manna. ¿Cuál era el peso original de la piedra? (Katz 2003, 27).

el de los tres peajes de la matemática tradicional china,

Es una persona que acarrea cereal y tiene que pasar por tres peajes. En el paso exterior, le quitan una tercera parte como impuesto. En el paso intermedio, le quitan una quinta parte. En el paso interior le quitan una séptima parte. Supón que el cereal *que le queda son 5 dou. Diga: ¿Cuánto cereal llevaba originalmente? (Nine chapter, en Kangshen et al. 1999, p. 345).*

o el de llenar y vaciar, también de la matemática tradicional china,

Cuando durante la primavera fui de excursión me llevé una botella de vino. Al llegar a una taberna dupliqué el contenido de la botella y me bebí 1 9⁄10 dou en la taberna. Tras visitar cuatro tabernas mi botella quedó vacía. Permíteme que te pregunte: ¿cuánto vino tenía al principio de la excursión? (Nine chapter, en Kangshen et al. 1999, c. 100 a. C.)

Clasificación de los problemas

Tal como se ha dicho anteriormente en este artículo únicamente se aborda el estudio de los problemas de fracciones encadenadas.

En primer lugar presentamos los cuatro subtipos, su enunciado genérico y su estructura. Esta clasificación ha sido posible gracias a los métodos de resolución utilizados por autores de diferentes épocas.

1. Problemas de quitar fracciones "de lo que queda" del todo desconocido.

Son problemas en los que a partir de un todo desconocido se quitan fracciones, iguales o desiguales, sucesivamente, pero siempre fracciones de lo que va quedando. Se conoce el resultado de quitar esas fracciones

Enunciado. Se pierde una parte $\frac{p_1}{q_1}$ de una cantidad T desconocida: después se pierde otra parte $\frac{p_2}{q_2}$ de lo que queda, y queda una cantidad A: ¿qué cantidad inicial se tenía?

Resolución. Se van a ir quitando partes según el enunciado, estas partes vendrán representadas por fracciones, $\frac{p_i}{q_i}$, dónde *i* indica cada sucesiva eliminación y $q_i \neq 0$.

(1)	$\frac{p_1}{q_1}T$	Hacer una parte del todo
(2)	$\left(T-\frac{p_1}{q_1}T\right)=T(1-\frac{p_1}{q_1})$	Lo que queda al quitar esa parte
Reiteración		
(3)	$\frac{p_2}{q_2}\cdot T(1-\frac{p_1}{q_1})$	Hacer una nueva parte con lo que queda
(4)	$T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)-\frac{p_2}{q_2}\cdot T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)=T(1-\frac{p_1}{q_1})(1-\frac{p_2}{q_2})$	Lo que queda al quitar la nueva parte

(5)	$T(1-\frac{p_1}{q_1})(1-\frac{p_2}{q_2})=A$	Igualando las dos maneras de expresar lo que queda (se plantea la ecuación)
(6)	$T=\frac{A}{(1-\frac{p_1}{q_1})(1-\frac{p_2}{q_2})}$	De (5) se obtiene la fórmula

Tabla 1. Problemas de quitar fracciones "de lo que queda" del todo desconocido. Se conoce la cantidad final que resulta de ese proceso.

2. Problemas de quitar un número y una fracción a un todo desconocido.

Estos problemas son una variante de los anteriores. Aquí las partes en vez de venir dadas por una fracción vienen dadas por una combinación de un número fijo y una fracción.

Enunciado. Se pierde una parte $\frac{p_1}{q_1}$ de una cantidad T desconocida y una fracción $\frac{a_1}{b_1}$: después se pierde otra parte $\frac{p_2}{q_2}$ de lo que queda y una fracción $\frac{a_2}{b_2}$, y queda una cantidad A: ¿qué cantidad inicial se tenía?

Resolución. Se van a ir quitando partes según el enunciado, estas partes vendrán representadas por una parte fraccionaria, $\frac{p_i}{q_i}$, dónde *i* indica cada sucesiva eliminación y $q_i \neq 0$, y además una fracción que no está relacionada con las partes sucesivas.

(1)	$\frac{p_1}{q_1}T+\frac{a_1}{b_1}$	Hacer una parte del todo
(2)	$\left(T-\left(\frac{p_1}{q_1}T+\frac{a_1}{b_1}\right)\right)=T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}$	Lo que queda al quitar esa parte
Reiteración		
(3)	$\frac{p_2}{q_2}\cdot\left(T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}\right)+\frac{a_2}{b_2}$	Hacer una nueva parte con lo que queda
(4)	$\left(T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}\right)-\left(\frac{p_2}{q_2}\cdot\left(T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}\right)+\frac{a_2}{b_2}\right)$ $=T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)-\frac{a_1}{b_1}\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)-\frac{a_2}{b_2}$	Lo que queda al quitar la nueva parte
(5)	$T\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)-\frac{a_1}{b_1}\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)-\frac{a_2}{b_2}=A$	Igualando las dos maneras de expresar lo que queda (plateo de la ecuación)

(6)	$T = \dfrac{A}{\left(1-\frac{p_1}{q_1}\right)\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)-\frac{a_1}{b_1}\left(1-\frac{p_2}{q_2}\right)-\frac{a_2}{b_2}}$	De (5) se obtiene la fórmula

Tabla 2. Problemas de quitar números mixtos a un todo desconocido. Se conoce la cantidad final que resulta de ese proceso.

3. Problemas de quitar y reponer a un todo desconocido.

Son problemas en los que a partir de un todo desconocido se quitan partes, iguales o desiguales, sucesivamente, pero siempre se repone una parte, igual o diferente, de lo que se ha quitado, y no siempre de la misma naturaleza.

Enunciado. Se pierde una parte $\frac{p_1}{q_1}$ de una cantidad T desconocida, y luego se repone una cantidad $\frac{r_1}{t_1}$.: después se pierde otra parte $\frac{p_2}{q_2}$ de lo que le queda, y luego se repone una cantidad $\frac{r_2}{t_2}$.; y queda una cantidad A: ¿qué cantidad inicial se tenía?

Resolución. Notar que las partes se denominan por $\frac{p_i}{q_i}$, dónde *i* indica cada sucesiva eliminación y $q_i \neq 0$. En el caso de la reposición, $\frac{r_i}{t_i}$, dónde *i* indica cada añadido y $t_i \neq 0$. Notar que estas partes pueden ser enteras o no serlo y además pueden ser de la misma magnitud del elemento que se va eliminando, pero puede no serlo.

(1)	$\frac{p_1}{q_1}T$	Hacer una parte
(2)	$\left(T-\frac{p_1}{q_1}T\right)$	Lo que queda
(3)	$(T-\frac{p_1}{q_1}T) \pm \frac{r_1}{t_1}$	Reponer
	Reiteración	
(4)	$\frac{p_2}{q_2} \cdot \left(\left(T-\frac{p_1}{q_1}T\right) \pm \frac{r_1}{t_1}\right)$	Hacer una segunda parte
(5)	$(T-\frac{p_1}{q_1}T) \pm \frac{r_1}{t_1} - \frac{p_2}{q_2} \cdot \left(\left(T-\frac{p_1}{q_1}T\right) \pm \frac{r_1}{t_1}\right)$	Lo que queda
(6)	$\left[T \cdot \left(1-\frac{p_1}{q_1}\right) \pm \frac{r_1}{t_1}\right] \cdot \left[1-\frac{p_2}{q_2}\right] \pm \frac{r_2}{t_2}$	Reponer
(7)	$\left[T \cdot \left(1-\frac{p_1}{q_1}\right) \pm \frac{r_1}{t_1}\right] \cdot \left[1-\frac{p_2}{q_2}\right] \pm \frac{r_2}{t_2} = A$	Igualando (6) a la cantidad que queda A, se obtiene la ecuación

(8)	$$T=\frac{\dfrac{A\mp\dfrac{r_2}{t_2}}{1-\dfrac{p_2}{q_2}}\mp\dfrac{r_1}{t_1}}{1-\dfrac{p_1}{q_1}}$$	De (7) se obtiene la fórmula

Tabla 3. Problemas de quitar y reponer a un todo desconocido. Se conoce la cantidad final que resulta de ese proceso.

4. Problemas de quita fracciones más enteros a un todo desconocido. Se sabe que el reparto es equitativo.

Se trata de una variante de los anteriores, pero al ser el reparto equitativo no es necesario conocer la cantidad que queda tras todo el reparto. El proceso de resolución es muy diferente.

Enunciado. Una cantidad T desconocida se debe repartir entre un número de personas n. Cada persona recibe: a_1 unidad más $\frac{p_1}{q_1}$ de las restantes, la 2ª a_2 unidades más $\frac{p_2}{q_2}$ de las restantes, la 3ª a_3 unidades más $\frac{p_3}{q_3}$ de las restantes, y así sucesivamente todas las demás personas. El reparto es equitativo. ¿Cuántas personas y qué cantidad hay?

Resolución. Se eliminan partes enteras de la misma naturaleza/magnitud que el todo T, a estas partes se les denomina a_i, siendo *i* cada una de los eliminaciones.

(1)	$T-a_1$	Se quita una cantidad
(2)	$\frac{p_1}{q_1}\,(T-a_1)$	Se hace una parte de lo que queda
(3)	$a_1+\frac{p_1}{q_1}\,(T-a_1)$	Lo que se le entrega al primero
(4)	$T-\left(a_1+\frac{p_1}{q_1}\,(T-a_1)\right)$	Lo que queda
	Reiteración	
(5)	$T-\left(a_1+\frac{p_1}{q_1}\,(T-a_1)\right)-a_2$	Se quita una cantidad
(6)	$\frac{p_2}{q_2}\cdot\left[T-\left(a_1+\frac{p_1}{q_1}\,(T-a_1)\right)-a_2\right]$	Se hace una segunda parte de lo que queda
(7)	$a_2+\frac{p_2}{q_2}\cdot\left[T-\left(a_1+\frac{p_1}{q_1}\,(T-a_1)\right)-a_2\right]$	Lo que se le entrega al segundo

(8)	$a_1 + \frac{p_1}{q_1}(T - a_1) =$ $a_2 + \frac{p_2}{q_2} \cdot \left[T - \left(a_1 + \frac{p_1}{q_1}(T - a_1)\right) - a_2\right]$	La condición del problema nos lleva a la ecuación, (4)=(7).
(9)	$T = \dfrac{a_1\left(-1 + \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_1}{q_1}\right) + a_2\left(1 - \frac{p_2}{q_2}\right)}{\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_2}{q_2} \cdot \frac{p_1}{q_1}}$	De (8) se obtiene la fórmula

Tabla 4. Problemas de quitar números mixtos a un todo desconocido. Se sabe que el reparto es equitativo.

Componentes Críticas de los Problemas de fracciones encadenadas

Tal como se ha dicho al inicio, el objeto de estudio de este trabajo es presentar las componentes críticas de estos problemas con el fin de analizar y evaluar el desempeño de los estudiantes en este tipo de tareas.

Llamamos componentes críticas a los elementos o información del enunciado cuya identificación hacen posible la resolución del problema. Diferenciamos entre genéricas y específicas.

Las ***componentes críticas genéricas*** son aquellas que son comunes al conjunto de problemas que se estudian. Son las siguientes:

1-. El significado de los términos, palabras, expresiones, del enunciado del problema y sus relaciones. En este caso, *sintagma "de lo que queda"*.

2-. Demanda de la tarea, es decir, saber identificar qué pide el enunciado.

3-. Traducción algebraica: plantear la ecuación.

En cuanto a las ***componentes críticas específicas*** son aquellas que son características de un tipo particular de problemas. Para describirlas nos apoyamos en los enunciados de los problemas y en sus métodos de resolución, de acuerdo con las estructuras del apartado anterior.

***a) Problemas de quitar fracciones "de lo que queda" del todo desconocido*.**

Un viajero de peregrinación da 1⁄2 de su dinero en Allahabad, 2⁄9 del resto en Benarés, 1⁄4 de lo que resta en peajes y 6⁄10 de lo que le queda en Patna. Después de hacerlo, le quedan 63 monedas de oro y regresa a casa. Dime la cantidad inicial de dinero. (Lilavati, 1150, p. 59)

La estructura genérica de resolución de estos problemas se muestra en la Tabla 1. Este es, de entre los cuatro tipos, según su estructura, el problema más sencillo, es por ello que la única dificultad que podemos encontrar es en el paso (3), cuando se reitere el proceso. El lector debe ser capaz de comprender que la fracción se debe realizar respecto a lo que queda tras realizar el primer reparto. Esta componente está relacionada con lo nombrado en las componentes generales, *Sintagma "de lo que queda"*, y que va a estar presente en el resto de problemas, en el paso (4) en la Tabla 2 y en el paso (2) en la Tabla 3. También el último paso (5), ser capaz de plantear la igualdad entre dos expresiones, el dato que te proporciona el problema y la cadena de fracciones que se ha ejecutado, esto está relacionado con la componente crítica general, *Traducción Algebraica*, que se repetirá a lo largo de cada uno de los tipos de problemas.

b) Problemas de quitar y reponer a un todo desconocido.

Un jugador pierde la mitad de su dinero, y luego gana 6s.: después pierde un tercio de lo que le queda, y luego gana 12s.; finalmente pierde un cuarto de lo que le queda, y halla que le quedan dos guineas: ¿qué suma tenía al principio? (Peacock, 1845, p. 252).

Es en la Tabla 2 dónde está el esquema de resolución de estos problemas. En este caso la dificultad está presente nuevamente en el paso (2), cuanto se debe obtener lo que queda tras la primera parte, pero añadimos dificultad al tener que reponer en el paso (3), y la dificultad está en que se debe reponer tras eliminar una primera parte. Debemos notar que la reiteración de estos pasos también puede ser una dificultad ya que el proceso se vuelve a repetir.

c) Problemas de quitar un número y una fracción a un todo desconocido.

Un hombre ha entrado en un huerto a coger rosas, y a la entrada hay tres puertas, y él ha de dar al que guarda la primera puerta la ½ de todas las rosas que había cogido y media más sin romper ninguna; a la segunda puerta ha de dar los 2/3 de las rosas que le habían quedado y 2/3 más sin romper ninguna, y a la tercera puerta ha de dar los ¾ de las rosas que le habían quedado y 3/4 de rosa más sin quebrar ninguna; y quiere, que le sobren 2 rosas. Pregunto, cuántas rosas ha de coger? (Problemas de Reglas Extraordinarias, Regla décima, Ventallol, 1621, p. 471)

La Tabla 3 presenta la estructura genérica de resolución de este tipo de problemas. En este caso la dificultad derivaría en el primer paso, saber manejar los números mixtos, así como nuevamente en el paso 2 con el sintagma de lo que queda.

d) Problemas de quita fracciones más enteros a un todo desconocido. Se sabe que el reparto es equitativo.

Un hombre que acaba de morir parte sus bienes consistentes en una cierta suma de ecus a sus hijos, de tal manera que ordena que el primero coja 1 ecu y la séptima parte de lo que queda, después que el segundo coja dos ecus y la séptima parte del resto, eso hace que el tercero coja 3 ecus y la séptima parte del resto; y así consecutivamente los otros. Al hacer la partición de esta manera se encuentra que cada uno de los hijos está igualmente proporcionado. Se pide la suma de ecus y el número de niños (Bachet, 1612, p. 149).

En este caso en la Tabla 4 se muestra la resolución. Las dificultades se incrementan, y se encuentra en el primer reparto (3), que está en conexión con la *Comprensión lectora* de las componentes críticas genéricas. La parte de enunciado, *a_1 unidad más $\frac{p_1}{q_1}$ de las restantes*, debe ser traducido con ayuda del paso (1) y (2) y es necesaria una buena comprensión para ejecutarlo correctamente. Es también un punto conflictivo del problema el paso (8), la obtención de la ecuación (relacionado con las componentes genéricas, *Traducción Algebraica* y también *comprensión lectora*). Para obtenerla se necesita un previo conocimiento sobre lo que significa reparto equitativo.

Conclusión.

En este trabajo se ha presentado la clasificación de los problemas de fracciones encadenadas. Una clasificación realizada gracias a las lecturas analíticas encontradas en los libros de textos de diferentes etapas históricas.

Además se realiza el análisis racional del mismo que nos permite obtener las componentes críticas de los problemas estudiados. Las componentes críticas se resumen en:

- El, *sintagma "de lo que queda",* es la característica que permite diferenciar a este tipo de problemas, y que si no se ejecuta, este tipo de problemas pasan de problemas de fracciones encadenadas a fracciones concatenadas.
- Reconocer el todo y manejarlo, como la unidad (valor de falsa posición) lo que lleva a una lectura aritmética o como "x" lo que lleva a una lectura algebraica.
- La traducción del enunciado a la hora de plantear el problema aritmético o algebraico

Las líneas de futuro son, diseñar un cuestionario para realizar así un estudio cognitivo y ver las competencias de los estudiantes en este tipo de problemas. Es decir, un análisis empírico en el que se intentará averiguar las estrategias y dificultades que tienen los estudiantes en cada uno de los tipos que hemos determinado. Además de plantear a los educadores cómo orientar la enseñanza para que los estudiantes sepan efectuar el análisis de las relaciones entre cantidades que determinan las condiciones de los enunciados, para elegir cuáles de las lecturas analíticas son las más apropiadas en cada caso para resolverlos.

Referencias Bibliográficas

Bachet C.G. (1612). *Problêmes plaisans et délectables qui se font par les nombres*. Alton: Chez Pierre Rigaud.

Bruño (1961). *Tratado teórico práctico de aritmética Razonada. Curso Superior*. (Décimo cuarta edición). Madrid: Ed. Bruño.

Fibonacci, L. (1202/2002). Liber Abacci. In: SIGLER, L.E. *Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation***.** New York: Springer, 2002 (Original, 1202).

Gómez, B (2003). *La investigación histórica en didáctica de las matemáticas*. In: Investigación en Educación Matemática. VII Simposio de la SEIEM. 2003, Granada, Actas. CASTRO E., FLORES, P.; ORTEGA, T.; RICO L. y VALLECILLOS A. (Eds.). Granada. U. de Granada., p. 79-85.

Jiuzhang Suanshu [The nine Chapters on the Mathematical Art] (100/1999). Traducido al inglés en Shen, Kangshen; Crossley, John N.; Lun, Anthony W. C. *The Nine Chapters on the Mathematical Art*: *Companion and Commentary.* Oxford: Oxford University Press. 1999 (contiene dos comentarios: uno de Liu Hui del s. III y otro del s. VII).

Lilavati (1150/2006). *Lilavati Of Bhaskaracarya Treatise of Mathematics of Vedic Tradition*. En Patwardhan, K. S., Naimpally, S. A. y Singh, Dehli: Motilal Banarsldass Publisher Private Limited. 2ª ed. (1ª ed. 2001).

Katz, V. (2003), *A history of mathematics*, Addison-Wesley, Nueva York.— (ed.) (2007), *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam: A sourcebook*, Princeton University Press, Princeton.

Peacock, G. (1842). *Treatise on Algebra*, vol.1. Cambridge: University press.

Pérez de Moya, J. (1562/1998). *Arithmetica práctica y speculativa*. Salamanca. Biblioteca Castro. Madrid. Ediciones de la Fundación José Antonio de Castro.

Puig, L., Cerdán, F.(1988) *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Rico, L., Lupiáñez, J.L., Molina, M. (2013) *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Comares.

Santcliment, F. (1482/1998): *Summa de l'art d'aritmètica*. Introducció, transcripció i notes a cura d'Antoni Malet. Viv: Eumo Editorial.

Swetz, F.J. (2013) *Expediciones Matemáticas. La aventura de los problemas matemáticos a través de la historia*. Madrid: La esfera de los libros.

Vallejo, José M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas,* escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid. Imp Garrayasaza. Primera ed. 1813.

Ventallol, J. (1521/1621). *Practica mercantivol*. Trad. del catalán de J. B. Tolrá. Tarragona: Gabriel Roberto, (Original, 1512).